НЕЛІНІЙНІ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ ТА ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ

© Марія Пташник

Львів, Україна

Мішані задачі для псевдопараболічних рівнянь виникають при моделюванні фільтрації рідини в пористих породах із тріщинами [1] та в породах з подвійною пористістю [2], перенесення вологи в грунті [3]. За допомогою нелінійного псевдопараболічного рівняння К. Й.ван Дуійн (C.J. van Duijn) [4] подає модель поширення рідини в пористому середовищі з нестатичними умовами. Е.Ді Бенедетто (E.Di Benedetto), Р.Е.Шовальтер (R.E.Showalter) [5] показали можливість зведення однофазової задачі Стефана до розв'язування псевдопараболічної варіаційної нерівності. Чен, Гуртін (Chen, Gurtin) [6] отримали псевдопараболічне рівняння розглядаючи двотемпературну теорію термодинаміки для кондуктивної температури . Доведення існування єдиного розв'язку для лінійної псевдопараболічної варіаційної нерівності знаходимо у праці Ф.Скарпіні (F.Scarpini)[7]. Загальна теорія псевдопараболічних рівнянь викладена в [8 - 13]. Задачі без початкових умов для лінійних та нелінійних псевдопараболічних систем вивчені в працях [14, 15].

У цій праці досліджено умови існування та єдиності розв'язку нелінійного псевдопараболічного рівняння та варіаційної нерівності з ненульовою початковою умовою. Для доведення єдиності використано монотонність операторів нелінійного рівняння. Існування розв'язку псевдопараболічного рівняння доводимо за допомогою методу регуляризації та методу Гальоркіна. При доведенні існування розв'язку варіаційної нерівності використано метод штрафу.

Нехай $\Omega-$ область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$. Нехай V_p, V_2- замкнені підпростори відповідно: $W_0^{1,p}(\Omega) \subset V_p \subset W^{1,p}(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) \subset V_2 \subset H^1(\Omega)$ і V_p єщільним в V_2. Розглянемо на проміжку $(0,T)$ рівняння

$$A(t,u_t) + B(t)u + \frac{1}{\alpha}\mathcal{B}(u_t) = F(t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

де $\alpha = \text{const} > 0$, оператори A , B визначені відповідно формулами

$$A : V_p \to V_p^*,\ \langle A(t,u),v\rangle = \int\limits_{\Omega_t}\Bigg[|u|^{p-2}uv - \sum_{i=1}^{n} a(x,t,|u_x|^{p-1})|u_x|^{p-2}u_{x_i}v_{x_i}\Bigg]dx,\ u,v \in V_p,$$

$$B : V_2 \to V_2^*,\ \langle B(t)u,v\rangle = \int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j} + b(x,t)uv\Bigg]dx,\ u,v \in V_2,$$

$\mathcal{B}$ є оператором штрафу [17, с.384], $\mathcal{B} = J(u - P_K u)$, $J-$ оператор двоїстості між просторами V_p і V_p^*, P_K- оператор проектування на множину K, яка є випуклою, замкненою у просторі V_p і містить нульовий елемент.

$$\langle F(t), v\rangle = \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x,t) v_{x_i} + f_0(x,t) v\right] dx, \quad \forall v \in V_p.$$

Зазначимо, що оператор $\mathcal{B}$ємонотонним і семінеперервним.

Для $p > 2$ маємо щільні і неперервні вкладення

$$V_p \subset V_2 \subset L_2(\Omega) \subset V_2^* \subset V_p^*.$$

Позначимо через W простір функцій

$$u : [0,T] \to V_p, \;\; W = \{u : u \in L^p((0,T); V_p), u_t \in L^q((0,T); V_p^*)\}, \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Припустимо, що коефіцієнти операторів A і B задовольняють умови

(A) функція $(x,t) \to a(x,t,\xi)$ вимірна для кожного $\xi \in [0, +\infty)$;
функція $\xi \to a(x,t,\xi)$ неперервна для майже всіх $(x,t) \in Q_T$;
$m \le a(x,t,\xi) \le M$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in [0, +\infty)$,
$m =$ const > 0, $M =$ const $< \infty$;
функція $\xi \to a(x,t,\xi)\xi$ зростає для майже всіх $(x,t) \in Q_T$;

(B) b_{ij}, b_{ijt}, b, $b_t \in L^\infty(Q_T)$, $i,j = 1,...,n$; $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\eta_i\eta_j \ge b_0|\eta|^2$
для майже всіх $(x,t) \in Q_T$ і для всіх $\eta \in \mathbb{R}^n$, $b_0 =$ const > 0;
$b(x,t) \ge b_0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$.

ОЗНАЧЕННЯ 1. Розв'язком задачі (1), (2) називатимемо функцію u, яка задовольняє включення $u \in L^2((0,T); V_2)$, $u_t \in L^p((0,T); V_p)$, умову (2) і рівність

$$\int\limits_0^T \left[\langle A(t,u_t), v\rangle + \langle B(t)u, v\rangle + \frac{1}{\alpha}\langle \mathcal{B}(u_t), v\rangle - \langle F(t), v\rangle\right] dt = 0 \qquad (3)$$

для довільної функції $v \in L^p((0,T); V_p)$.

ТЕОРЕМА 1. *Нехай виконуються умови (A), (B),* $p > 2$, $f_i \in L^q((0,T); V_p^*)$, $i = 0,1,...,n$, $u_0 \in V_2$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2).*

Доведення. Доведемо спочатку єдиність розв'язку. Нехай існують два розв'язки $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$ задачі (1), (2). Віднявши рівності (3), записані для функцій $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$, та вибравши $v = u_t e^{-\nu t}$, $\nu = \mathrm{const} > 0$, $u = u^{(1)} - u^{(2)}$, одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_T} (|u_t^{(1)}|^{p-2}u_t^{(1)} - |u_t^{(2)}|^{p-2}u_t^{(2)})u_t e^{-\nu t} dxdt+$$
$$+ \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} (a(x,t,|u_{xt}^{(1)}|^{p-1})|u_{xt}^{(1)}|^{p-2}u_{x_i t}^{(1)} - a(x,t,|u_{xt}^{(2)}|^{p-1})|u_{xt}^{(2)}|^{p-2}u_{x_i t}^{(2)})u_{x_i t}e^{-\nu t}dxdt+$$
$$+ \int\limits_{Q_T} \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}u_{x_j t} + b(x,t)uu_t \right) e^{-\nu t}dxdt$$
$$+ \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^T \langle \mathcal{B}(u_t^{(1)}) - \mathcal{B}(u_t^{(2)}), u_t\rangle e^{-\nu t}dt = 0. \tag{4}$$

Оцінимо знизу кожний доданок рівності (4). Використовуючи лему 1.2 [18, с.10], маємо

$$I_1 = \int\limits_{Q_T} (|u_t^{(1)}|^{p-2}u_t^{(1)} - |u_t^{(2)}|^{p-2}u_t^{(2)})u_t e^{-\nu t}\, dxdt \ge 2^{2-p} \int\limits_{Q_T} |u_t|^p e^{-\nu t}\, dxdt.$$

Згідно з умовою (A) теореми та лемою 1.6 [16, с. 89] дістаємо

$$I_2 = \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} (a(x,t,|u_{xt}^{(1)}|^{p-1})|u_{xt}^{(1)}|^{p-2}u_{x_i t}^{(1)} -$$
$$- a(x,t,|u_{xt}^{(2)}|^{p-1})|u_{xt}^{(2)}|^{p-2}u_{x_i t}^{(2)})u_{x_i t}e^{-\nu t}\, dxdt \ge 0.$$

На підставі умови (B) теореми існує така стала $b^1 > 0$, що

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ijt}(x,t)\eta_i\eta_j \le b^1|\eta|^2, \quad |b_t(x,t)| \le b^1$$

для майже всіх $(x,t) \in Q_T$ і для всіх $\eta \in \mathbb{R}^n$. Тому

$$I_3 \ge \frac{1}{2}b_0 \int\limits_{\Omega_T} (|u_x|^2 + |u|^2)e^{-\nu T}\, dx + \frac{1}{2}(\nu b_0 - b^1) \int\limits_{Q_T} (|u_x|^2 + |u|^2)e^{-\nu t}\, dxdt.$$

Оскільки оператор $\mathcal{B}$ монотонний, то

$$I_4 = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^T \langle \mathcal{B}(u_t^{(1)}) - \mathcal{B}(u_t^{(2)}), u_t\rangle e^{-\nu t}dt \ge 0.$$

Отже, враховуючи оцінки інтегралів I_1, I_2, I_3, I_4, одержуємо нерівність

$$2^{3-p}\int\limits_{Q_T}|u_t|^p e^{-\nu t}dxdt+(\nu b_0-b^1)\int\limits_{\Omega_T}[|u_x|^2+|u|^2]e^{-\nu T}dx+$$
$$+\,b_0\int\limits_{\Omega_T}[|u_x|^2+|u|^2]e^{-\nu T}dx\le 0.$$

Виберемо $\nu=2b^1/b_0$. Тоді з останньої¿нерівності випливає, що $u(x,t)=0$ майже всюди в Q_T , тобто $u^{(1)}(x,t)=u^{(2)}(x,t)$ і єдиність доведено.

Доведемо тепер існування розв'язку. Нехай $\{\phi^k(x)\}$ є базою простору V_p , ортонормованою в $L^2(\Omega)$. Розглянемо послідовність функцій

$$u_k=\sum_{s=1}^{k}z_s^k(t)\phi^s(x),\quad k=1,2,..,$$

в яких функції $z_1^k,...,z_k^k$ є розв'язками такої задачі Коші

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\varepsilon u_{tt}^k\phi^s(x)+|u_t^k|^{p-2}u_t^k\phi^s+\sum_{i=1}^{n}a(x,t,|u_{xt}^k|^{p-1})|u_{xt}^k|^{p-2}u_{x_it}^k\phi_{x_i}^s(x)+b(x,t)u^k\phi^s+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u_{x_i}^k\phi_{x_j}^s(x)-\sum_{i=1}^{n}f_i(x,t)\phi_{x_i}^s-f_0(x,t)\phi^s\Big]dx+\frac{1}{\alpha}\langle\mathcal{B}(u_t^k),\phi^s(x)\rangle=0; \tag{5}$$
$$z_s^k(0)=u_s^k,\quad z_{st}^k(0)=0,\quad s=1,...,k, \tag{6}$$

де $\varepsilon>0-$ фіксований параметр, $u_0^k=\sum\limits_{s=1}^{k}u_s^k\phi^k(x)$, причому $\lim\limits_{k\to\infty}||u_0^k-u_0||_{V_2}=0.$

На підставі оцінок, встановлених нижче, на проміжку $[0,T]$ існує розв'язок задачі (5), (6) з абсолютно неперервною похідною.

Помноживши кожне рівняння системи (5) відповідно на функцію $z_{st}^k(t)$, підсумувавши ¿їх за індексом s від 1 до k і проінтегрувавши по проміжку $[0,\tau]$, $0<\tau\le T$, одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[\varepsilon u_{tt}^k u_t^k+|u_t^k|^p+a(x,t,|u_{xt}^k|^{p-1})|u_{xt}^k|^p+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u_{x_i}^k u_{x_jt}^k+b(x,t)u^k u_t^k-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}f_i(x,t)u_{x_it}^k-f_0(x,t)u_t^k\Big]e^{-\nu t}dxdt+\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\tau\langle\mathcal{B}(u_t^k),u_t^k\rangle e^{-\nu t}dt=0. \tag{7}$$

Перетворимо і оцінимо кожний доданок цієї рівності. Враховуючи другі початкові умови (6) та умови теореми, маємо

$$I_5 = \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u_t^k|^2 e^{-\nu t}dx + \frac{\nu\varepsilon}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^2 e^{-\nu t}dxdt; \quad I_6 \geq m\int\limits_{Q_\tau} |u_{xt}^k|^p e^{-\nu t}dxdt;$$

$$I_7 \geq \frac{1}{2}b_0 \int\limits_{\Omega_\tau} (|u_x^k|^2 + |u^k|^2)e^{-\nu\tau}dx - \frac{1}{2}b^0 \int\limits_{\Omega} (|u_{0,x}^k|^2 + |u_0^k|^2)e^{-\nu t}dx +$$

$$+\frac{1}{2}(\nu b_0 - b^1)\int\limits_{Q_\tau} (|u_x^k|^2 + |u^k|^2)e^{-\nu t}dxdt,$$

де b^0 знаходимо з умови (B): $\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\eta_i\eta_j \leq b^0|\eta|^2$, $b(x,t) \leq b^0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$ і для всіх $\eta \in \mathbb{R}^n$. На підставі умов на функції f_i отримаємо оцінку

$$I_8 \leq \frac{\delta}{p}\int\limits_{Q_\tau} (|u_{xt}^k|^p + |u_t^k|^p)e^{-\nu t}dxdt + \frac{1}{q\delta^{\frac{q}{p}}}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=0}^{n} |f_i(x,t)|^q e^{-\nu t}dxdt, \quad \delta > 0.$$

Крім того,

$$I_9 = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\tau \langle \mathcal{B}(u_t^k), u_t^k\rangle e^{-\nu t}dt \geq 0.$$

Враховуючи умову (A), одержимо оцінку

$$\int\limits_0^T \langle A(t,u_t^k), v\rangle dt \ \leq \mu_1 ||u_t^k||_{L^p((0,T);V_p)} ||v||_{L^p((0,T);V_p)} \tag{8}$$

для довільної функції $v \in L^p((0,T);V_p)$. На підставі оцінок інтегралів I_5, I_6, I_7, I_8, I_9 та (8) з рівності (7) отримуємо оцінки

$$\int\limits_{\Omega_t} (|u^k|^2 + |u_x^k|^2)dx \leq \mu_2; \ \varepsilon\int\limits_{\Omega_t} |u_t^k|^2 dx \leq \mu_2; \ t \in [0,T],$$

$$\int\limits_{Q_T} (|u_t^k|^p + |u_{xt}^k|^p)dxdt \leq \mu_2; \ \int\limits_{Q_T} (|u^k|^2 + |u_x^k|^2)dxdt \leq \mu_2;$$

$$\int\limits_0^T \langle \mathcal{B}(u_t^k), u_t^k\rangle dt \leq \alpha\mu_2; \ ||A(\cdot,u_t^k)||_{L^q((0,T);V_p^*)} \leq \mu_2, \tag{9}$$

де μ_2 залежить від правої частини рівняння і початкових даних та не залежить від k і ε. Крім того, оператор $\mathcal{B}$ єобмеженим [17, с. 385]. На підставі оцінок (9) існуєпідпослідовність $\{u^{k_m}(x,t)\}$ послідовності $\{u^k(x,t)\}$ така, що

$$\begin{aligned}
&u^{k_m} \to u^{\varepsilon} \ \text{*- слабко в } L^{\infty}((0,T);V_2);\\
&u^{k_m} \to u^{\varepsilon} \ \ \text{слабко в } L^{2}((0,T);V_2);\\
&u_t^{k_m} \to u_t^{\varepsilon} \ \ \text{слабко в } L^{p}((0,T);V_p);\\
&u_t^{k_m} \to u_t^{\varepsilon} \ \text{*- слабко в } L^{\infty}((0,T);L^2(\Omega));\\
&A(u_t^{k_m}) + \frac{1}{\alpha}\mathcal{B}(u_t^{k_m}) \to \theta^{\varepsilon} \ \text{слабко в } L^{q}((0,T);V_p^*)
\end{aligned} \tag{10}$$

при $m \to \infty$.

Враховуючи (10), маємо

$$\begin{aligned}
&\langle A(t,u_t^{k_m}) + \frac{1}{\alpha}\mathcal{B}(u_t^{k_m}), \phi^k\rangle \to \langle \theta^{\varepsilon}, \phi^k\rangle \ \ \text{слабко в } L^p(0,T),\\
&\langle B(t)u^{k_m}, \phi^k\rangle \to \langle B(t)u^{\varepsilon}, \phi^k\rangle \ \ \text{*- слабко в } L^{\infty}(0,T)\\
&\langle u_t^{k_m}, \phi^k\rangle \to \langle u_t^{\varepsilon}, \phi^k\rangle \ \ \text{*- слабко в } L^{\infty}(0,T)
\end{aligned}$$

при $m \to \infty$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Отже

$$\langle u_{tt}^{k_m}, \phi^k\rangle = \frac{d}{dt}\langle u_t^{k_m}, \phi^k\rangle \to \langle u_{tt}^{\varepsilon}, \phi^k\rangle \quad \text{в } \ \mathcal{D}'(0,T)$$

при $m \to \infty$ для довільного $k \in \mathbb{N}$.

Розглянемо тепер рівняння (5) для k_m і перейдемо в них до границі при $m \to \infty$. Тоді

$$\varepsilon\langle u_{tt}^{\varepsilon}, \phi^k\rangle = \langle F(t) - \theta^{\varepsilon} - B(t)u^{\varepsilon}, \phi^k\rangle$$

для довільного $k \in \mathbb{N}$, тобто правильна рівність

$$\varepsilon\langle u_{tt}^{\varepsilon}, v\rangle = \langle F(t) - \theta^{\varepsilon} - B(t)u^{\varepsilon}, v\rangle$$

для довільної функції $v \in V_p$.

З останньої рівності випливає, що $u_{tt}^{\varepsilon} \in L^q((0,T);V_p^*)$. Оскільки $u_t^{\varepsilon} \in L^p((0,T);V_p)$, то на підставі теореми 1.17 [16, с. 177] $u_t^{\varepsilon} \in C([0,T];L^2(\Omega))$ і є правильною формула

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\langle u_{tt}^{\varepsilon}, u_t^{\varepsilon}\rangle e^{-\nu t}dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}}|u_t^{\varepsilon}|^2 e^{-\nu t_2}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}}|u_t^{\varepsilon}|^2 e^{-\nu t_1}dx + \frac{\nu}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}|u_t^{\varepsilon}|^2 e^{-\nu t}dxdt \tag{11}$$

для довільних $t_1, t_2 \in [0,T], t_1 < t_2$. Крім того, $\langle u_t^{k_m}, \phi^k\rangle \to \langle u_t^{\varepsilon}, \phi^k\rangle$ *- слабко в $L^{\infty}(0,T)$. Тому

$$\langle 0, \phi^k\rangle = \langle u_t^{k_m}(0), \phi^k\rangle \to \langle u_t^{\varepsilon}(0), \phi^k\rangle \text{ і } \langle u_t^{k_m}(T), \phi^k\rangle \to \langle u_t^{\varepsilon}(T), \phi^k\rangle \tag{12}$$

при $m \to \infty$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Звідси маємо

$$u^\varepsilon_t(x,0) = 0. \tag{13}$$

Аналогічно, $\langle u^{k_m}(0), \phi^k\rangle \to \langle u^\varepsilon(0), \phi^k\rangle$ при $m \to \infty$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. З іншого боку $\langle u^{k_m}(0), \phi^k\rangle = \langle u_0^{k_m}, \phi^k\rangle \to \langle u_0, \phi^k\rangle$ при $m \to \infty$. Тому

$$u^\varepsilon(x,0) = u_0(x). \tag{14}$$

Використовуючи рівняння (5) одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_T} [-\varepsilon u_t^{k_m} v_t^r + \varepsilon\nu u_t^{k_m} v^r + |u_t^{k_m}|^{p-2} u_t^{k_m} v^r + \sum_{i=1}^n a(x,t,|u_{xt}^{k_m}|^{p-1})|u_{xt}^{k_m}|^{p-2} u_{x_it}^{k_m} v_{x_i}^r +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u_{x_i}^{k_m} v_{x_j}^r + b(x,t) u^{k_m} v^r - \sum_{i=1}^n f_i(x,t) v_{x_i}^r - f_0(x,t) v^r)] e^{-\nu t} dx dt +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{\Omega_T} u_t^{k_m} v^r e^{-\nu T} dx + \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^T \langle B(u_t^{k_m}), v^r\rangle dt = 0.$$

для довільної функції¿ v^r вигляду $v^r = \sum\limits_{l=1}^r d_l^r(t)\phi^l(x)$, $d_l^r \in C^1([0,T])$, $k_m \geq r$. Перейшовши в даній рівності до границі, врахувавши (12), одержимо рівність

$$-\varepsilon \int\limits_0^T \langle u_t^\varepsilon, v_t\rangle e^{-\nu t} dt + \int\limits_{Q_T} \Big[\varepsilon\nu u_t^\varepsilon v + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u_{x_i}^\varepsilon v_{x_j} + b(x,t) u^\varepsilon v -$$

$$- \sum_{i=1}^n f_i(x,t) v_{x_i} - f_0(x,t) v\Big] e^{-\nu t} dx dt + \varepsilon \int\limits_{\Omega_T} u_t^\varepsilon v e^{-\nu T} dx + \int\limits_0^T \langle \theta^\epsilon, v\rangle e^{-\nu t} dt = 0 \tag{15}$$

правильну для довільної функції $v \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} = \bigcup_{r=1}^\infty \mathcal{M}_r$, де $\mathcal{M}_r$ є множиною функцій вигляду $\sum\limits_{l=1}^r d_l^r(t)\phi^l(x)$, $d_l^r \in C^1([0,T])$. Оскільки множина $\mathcal{M}$ є щільною в просторі W, то рівність (15) є правильною і для всіх $v \in W$.

Доведемо тепер, що $\theta^\epsilon = A(t, u_t^\varepsilon) + \frac{1}{\alpha}\mathcal{B}(u_t^\varepsilon)$. Розглянемо послідовність

$$Y_m = \int\limits_0^T \langle A(t, u_t^{k_m}) + \frac{1}{\alpha}\mathcal{B}(u_t^{k_m}) - (A(t,v) + \frac{1}{\alpha}\mathcal{B}(v)), u_t^{k_m} - v\rangle e^{-\nu t} dt$$

для довільного $v \in W$. На підставі (7), маємо

$$Y_m = \int\limits_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x,t) u_{x_i t}^{k_m} + f_0(x,t) u_t^{k_m} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (\nu b_{ij}(x,t) - b_{ijt}(x,t)) u_{x_i}^{k_m} u_{x_j}^{k_m} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(\nu b(x,t) - b_t(x,t)) |u^{k_m}|^2 - \frac{\varepsilon \nu}{2} |u_t^{k_m}|^2 \right] e^{-\nu t} dx dt - \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\Omega_T} |u_t^{k_m}|^2 e^{-\nu T} dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T} \left[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,T) u_{x_i}^{k_m} u_{x_j}^{k_m} + b(x,T) |u^{k_m}|^2 \right] e^{-\nu T} dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,0) u_{0,x_i}^{k_m} u_{0,x_j}^{k_m} + b(x,0) |u_0^{k_m}|^2 \right] dx -$$

$$- \int\limits_0^T \langle A(t, u_t^{k_m}) + \frac{1}{\alpha} \mathcal{B}(u_t^{k_m}), v \rangle dt - \int\limits_0^T \langle A(t,v) + \frac{1}{\alpha} \mathcal{B}(v), u_t^{k_m} - v \rangle e^{-\nu t} dt.$$

Врахувавши (10) і провівши інтегрування частинами, матимемо

$$0 \le \liminf Y_m \le \int\limits_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x,t) u_{x_i t}^{\varepsilon} + f_0(x,t) u_t^{\varepsilon} - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t) u_{x_i}^{\varepsilon} u_{x_j t}^{\varepsilon} - \right.$$

$$\left. - b(x,t) u^{\varepsilon} u_t^{\varepsilon} \right] e^{-\nu t} dx dt - \frac{\varepsilon \nu}{2} \int\limits_{Q_T} |u_t^{\varepsilon}|^2 e^{-\nu t} dx dt - \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\Omega_T} |u_t^{\varepsilon}|^2 e^{-\nu T} dx -$$

$$- \int\limits_0^T \langle A(t,v) + \frac{1}{\alpha} \mathcal{B}(v), u_t^{\varepsilon} - v \rangle e^{-\nu t} dt - \int\limits_0^T \langle \theta^{\varepsilon}, v \rangle e^{-\nu t} dt \tag{16}$$

для довільної функції $v \in W$. Покладемо в (15) $v = u_t^{\varepsilon}$. Врахувавши формулу (11) при $t_1 = 0$, $t_2 = T$, додамо (15) до нерівності (16)

$$\int\limits_0^T \langle \theta^{\varepsilon} - A(t,v) - \frac{1}{\alpha} \mathcal{B}(v), u_t^{\varepsilon} - v \rangle e^{-\nu t} dt \ge 0. \tag{17}$$

Приймемо, що в (17) $v = u_t^{\varepsilon} - \lambda w$, $w \in W$, $\lambda > 0$. Тоді матимемо нерівність

$$\lambda \int\limits_0^T \langle \theta^{\varepsilon} - A(t, u_t^{\varepsilon} - \lambda w) - \frac{1}{\alpha} \mathcal{B}(u_t^{\varepsilon} - \lambda w), w \rangle e^{-\nu t} dt \ge 0.$$

Оскільки оператори A і $\mathcal{B}$ є семінеперервними, то з останньої нерівності одержимо, перейшовши в ній до границі при $\lambda \to +0$,

$$\int\limits_0^T \langle \theta^{\varepsilon} - A(t, u_t^{\varepsilon}) - \frac{1}{\alpha} \mathcal{B}(u_t^{\varepsilon}), w \rangle e^{-\nu t} dt \ge 0$$

для довільної $w \in W$. Тому $A(t,u_t^\varepsilon)+\frac{1}{\alpha}\mathcal{B}(u_t^\varepsilon)=\theta^\varepsilon$. Отже (15) можемо переписати так:

$$-\varepsilon\int_0^T\langle u_t^\varepsilon,v_t\rangle e^{-\nu t}dt+\int_{Q_T}\Big[\varepsilon\nu u_t^\varepsilon v+|u_t^\varepsilon|^{p-2}u_t^\varepsilon v+\sum_{i=1}^n a(x,t,|u_{xt}^\varepsilon|^{p-1})|u_{xt}^\varepsilon|^{p-2}u_{x_it}^\varepsilon v_{x_i}+$$
$$+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^\varepsilon v_{x_j}+b(x,t)u^\varepsilon v-\sum_{i=1}^n f_i(x,t)v_{x_i}-f_0(x,t)v\Big]e^{-\nu t}dxdt+$$
$$+\varepsilon\int_{\Omega_T}u_t^\varepsilon ve^{-\nu T}dx+\frac{1}{\alpha}\int_0^T\langle\mathcal{B}(u_t^\varepsilon),v\rangle e^{-\nu t}dt=0,\ \forall v\in W. \tag{18}$$

Зокрема, формула (18) є правильною і для функції $v=u_t^\varepsilon$. Тому провівши оцінки окремих доданків в (18), аналогічно до (7), одержимо

$$\int_{\Omega_t}(|u^\varepsilon|^2+|u_x^\varepsilon|^2)dx\le\mu_2;\ \varepsilon\int_{\Omega_t}|u_t^\varepsilon|^2dx\le\mu_2;t\in[0,T];$$
$$\int_{Q_T}(|u_t^\varepsilon|^p+|u_{xt}^\varepsilon|^p)dxdt\le\mu_2;\ \int_{Q_T}(|u^\varepsilon|^2+|u_x^\varepsilon|^2)dxdt\le\mu_2;$$
$$||Au_t^\varepsilon||_{L^q((0,T);V_p^*)}\le\mu_2;\ \int_0^T\langle\mathcal{B}(u_t^\varepsilon),u_t^\varepsilon\rangle dt\le\alpha\mu_2, \tag{19}$$

де стала μ_2 не залежить від ε. На підставі (19) існує така підпослідовність $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ множини $\{u^\varepsilon(x,t)\}$, що

$$\begin{aligned}
&u^{\varepsilon_m}\to u\ \text{*- слабко в } L^\infty((0,T);V_2);\\
&u^{\varepsilon_m}\to u\ \ \text{слабко в } L^2((0,T);V_2);\\
&u_t^{\varepsilon_m}\to u_t\ \ \text{слабко в } L^p((0,T);V_p);\\
&A(t,u_t^{\varepsilon_m})+\frac{1}{\alpha}\mathcal{B}(u_t^{\varepsilon_m})\to\theta\ \ \text{слабко в } L^q((0,T);V_p^*)\\
&\varepsilon_m u_t^{\varepsilon_m}\to 0\ \text{слабко в } L^2((0,T);L^2(\Omega));\\
&\varepsilon_m u_t^{\varepsilon_m}(\cdot,T)\to 0\ \ \text{слабко в } \ L^2(\Omega)
\end{aligned} \tag{20}$$

при $\varepsilon_m\to 0$. Справді, існує підпослідовність $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ така, що

$$\begin{aligned}
&u_t^{\varepsilon_m}\to u_t\ \ \text{слабко в } L^2((0,T);L^2(\Omega));\\
&u_t^{\varepsilon_m}(\cdot,T)\to\omega\ \ \text{слабко в } L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Тоді для довільного $v\in L^2(Q_T)$,

$$\left|\varepsilon_m\int_{Q_T}u_t^m vdxdt\right|\le\frac{\varepsilon_m^{4/3}}{2}\int_{Q_T}|u_t^{\varepsilon_m}|^2dxdt+\frac{\varepsilon_m^{1/3}}{2}\int_{Q_T}|v|^2dxdt\to 0.$$

при $\varepsilon_m \to 0$. Аналогічно $\varepsilon_m \int\limits_{\Omega_T} u_t^{\varepsilon_m} v dx \to 0$ при $\varepsilon_m \to 0$. Звідси одержуємо дві останні збіжності в (20). Перейшовши в (18) до границі при $\varepsilon_m \to 0$, одержимо рівність

$$\int_0^T \langle \theta, v\rangle e^{-\nu t} dt + \int_{Q_T} \Bigg[\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u_{x_i} v_{x_j} +$$

$$+ b(x,t)uv - \sum_{i=1}^n f_i(x,t) v_{x_i} - f_0 v \Bigg] e^{-\nu t} dx\, dt = 0,$$

яка є правильною для довільної функції $v \in L^p((0,T), V_p)$. Аналогічно, як і для θ^ε доводимо, що $\theta = A(t,u_t) + \frac{1}{\alpha}\mathcal{B}(u_t)$. Крім того, оскільки $u^{\varepsilon_m}(x,0) = u_0(x)$, то на підставі неперервності відображення $u : [0,T] \to L^2(\Omega)$ (лема 1.2 [17, с.20]) $u(x,0) = u_0(x)$. Отже, знайдена функція єрозв'язком задачі (1), (2) і теорему доведено.

Розглянемо на проміжку $[0,T]$ варіаційну нерівність

$$\int_0^T \Bigg[\langle A(t,u_t), v - u_t\rangle + \langle B(t)u, v - u_t\rangle - \langle F(t), v - u_t\rangle \Bigg] e^{-\nu t} dt \geq 0 \tag{21}$$

з початковою умовою

$$u(0) = u_0, \tag{22}$$

де $\nu = 2b^1/b_0$.

Означення 2. Розв'язком задачі (21), (22) називатимемо функцію u, $u \in L^2((0,T);V_2)$, $u_t \in L^p((0,T);V_p)$, $u_t \in K$ для майже всіх $t \in (0,T)$, яка задовольняє(21) для довільної функції¿ $v \in L^p((0,T);V_p)$, $v \in K$ для майже всіх $t \in (0,T)$ і умову (22).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (B), $p > 2$, $f_i \in L^q((0,T);V_p^*)$, $i = 0,1,...,n$, $u_0 \in V_2$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі (21), (22).*

Доведення. Спочатку доведемо єдиність розв'язку. Припустимо, що задача (21), (22) має два розв'язки $u^{(1)}(x,t)$ і $u^{(2)}(x,t)$. Тоді для $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$ матимемо нерівності

$$\int_0^T \Bigg[\langle A(t,u_t^{(i)}), v - u_t^{(i)}\rangle + \langle B(t)u^{(i)}, v - u_t^{(i)}\rangle - \langle F(t), v - u_t^{(i)}\rangle \Bigg] e^{-\nu t} dt \geq 0,\ i=1,2 \tag{23}$$

для довільної $v \in L^p((0,T);V_p)$. Оскільки функція $u_t^{(1)} + u_t^{(2)}$ належить до простору

$L^p((0,T);V_p)$, то в нерівностях (23) можна прийняти, що $v = \frac{1}{2}(u_t^{(1)} + u_t^{(2)})$. Додавши ці нерівності матимемо

$$\int_0^T \Big[\langle A(t,u_t^{(1)}) - A(t,u_t^{(2)}), u_t\rangle + \langle B(t)u, u_t\rangle\Big] e^{-\nu t}dt \le 0, \tag{24}$$

де $u(x,t) = u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)$. З нерівності (24) аналогічно як при доведенні єдиності в теоремі 1 одержимо, що $u^{(1)}(x,t) = u^{(2)}(x,t)$ майже всюди в Q_T.

Розглянемо тепер задачу (1), (2). На підставі теореми 1 для кожного додатного α існує розв'язок цієї задачі $u^\alpha(x,t)$, причому $u^\alpha \in L^2((0,T);V_2)$, $u_t^\alpha \in L^p((0,T);V_p)$ і

$$\int_0^T \Big[\langle A(t,u_t^\alpha), u_t^\alpha\rangle + \langle B(t)u^\alpha, u_t^\alpha\rangle - \langle F(t), u_t^\alpha\rangle + \frac{1}{\alpha}\langle \mathcal{B}(u_t^\alpha), u_t^\alpha\rangle\Big] e^{-\nu t}dt = 0.$$

На підставі умов теореми з цієї рівності, аналогічно як при доведенні теореми 1, одержимо оцінки

$$\int_{\Omega_t} (|u^\alpha|^2 + |u_x^\alpha|^2)dx \le \mu_3,\ t\in[0,T];\ \int_{Q_T} (|u^\alpha|^2 + |u_x^\alpha|^2)dxdt \le \mu_3;$$

$$\int_{Q_T} (|u_t^\alpha|^p + |u_{xt}^\alpha|^p)dxdt \le \mu_3;$$

$$||Au_t^\alpha||_{L^q(0,T;V_p^*)} \le \mu_3;\ \int_0^T \langle \mathcal{B}(u_t^\alpha), u_t^\alpha\rangle dt \le \mu_3,$$

де стала μ_3 не залежить від α. Тоді існує така підпослідовність $\{u^{\alpha_k}(x,t)\} \subset \{u^\alpha(x,t)\}$, що

$$\begin{aligned}
&u^{\alpha_k} \to u \text{ *- слабко в } L^\infty((0,T);V_2),\\
&u^{\alpha_k} \to u \text{ слабко в } L^2((0,T);V_2),\\
&u_t^{\alpha_k} \to u \text{ слабко в } L^p((0,T);V_p),\\
&A(\cdot,u_t^{\alpha_k}) \to \theta \text{ слабко в } L^q((0,T);V_p^*)
\end{aligned} \tag{25}$$

при $\alpha_k \to 0$. Згідно з (1) і (25)

$$\mathcal{B}(u_t^{\alpha_k}) = \alpha_k(F(t) - A(t,u_t^{\alpha_k}) - B(t)u^{\alpha_k}) \to 0 \quad \text{в} \quad L^q((0,T);V_p^*) \tag{26}$$

при $\alpha_k \to 0$. Беручи до умаги (26) та монотонність і семінеперервність $\mathcal{B}$ отримаємо, що $\mathcal{B}(u_t) = 0$, тобто $u_t \in K$ для майже всіх $t \in [0,T]$. На підставі теореми 5.1 [17, с.70] можемо вважати, що $u^{\alpha_k} \to u$ в просторі $L^2((0,T);L^2(\Omega))$ і майже для всіх $(x,t) \in Q_T$ при $\alpha_k \to 0$. Оскільки $u \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$ (лема 1.2 [17, с.

20]), то $u^{\alpha_k}(0) \to u(0)$ слабко в $H_0^1(\Omega)$. Проте $u^{\alpha_k}(0) = u_0$. Тому $u(0) = u_0$ і функція $u(x,t)$ задовольняє умову (22).

Вибравши в (3) $v = (u_t^{\alpha_k} - u_t)e^{-\nu t}$, матимемо

$$\int_0^T \Big[\langle A(t,u_t^{\alpha_k}), u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle + \langle B(t)u^{\alpha_k}, u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle\Big] e^{-\nu t}dt$$

$$+\frac{1}{\alpha_k}\int_0^T \langle \mathcal{B}(u_t^{\alpha_k}) - \mathcal{B}(u_t), u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle e^{-\nu t}dt = \int_0^T \langle F(t), u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle e^{-\nu t}dt.$$

Враховуючи монотонність оператора $\mathcal{B}$ та збіжності (25) отримуємо

$$\limsup_{\alpha_k\to 0}\int_0^T \Big[\langle A(t,u_t^{\alpha_k}), u_t^{\alpha_k}\rangle + \langle B(t)u^{\alpha_k}, u_t^{\alpha_k}\rangle\Big] e^{-\nu t}dt \le$$

$$\le \int_0^T \Big[\langle \theta, u_t\rangle + \langle B(t)u, u_t\rangle\Big] e^{-\nu t}dt = \lim_{\alpha_k\to 0}\int_0^T \Big[\langle A(t,u_t^{\alpha_k}), u_t\rangle + \langle B(t)u^{\alpha_k}, u_t\rangle\Big] e^{-\nu t}dt$$

або

$$\limsup_{\alpha_k\to 0}\int_0^T \Big[\langle A(t,u_t^{\alpha_k}), u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle + \langle B(t)u^{\alpha_k}, u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle\Big] e^{-\nu t}dt \le 0. \tag{27}$$

Розглянемо тепер

$$Y_k = \int_0^T \Big[\langle A(t,u_t^{\alpha_k}) - A(t,u_t), u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle + \langle B(t)(u^{\alpha_k} - u), u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle\Big] e^{-\nu t}dt.$$

З властивостей операторів A і B випливає, що $Y_k \ge 0$. Отже

$$0 \ge \limsup_{\alpha_k\to 0}\int_0^T \Big[\langle A(t,u_t^{\alpha_k}), u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle + \langle B(t)u^{\alpha_k}, u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle\Big] e^{-\nu t}dt$$

$$\ge \lim_{\alpha_k\to 0}\int_0^T \Big[\langle A(t,u_t), u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle + \langle B(t)u, u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle\Big] e^{-\nu t}dt = 0.$$

Звідси

$$\lim_{\alpha_k\to 0}\int_0^T \Big[\langle A(t,u_t^{\alpha_k}), u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle + \langle B(t)u^{\alpha_k}, u_t^{\alpha_k} - u_t\rangle\Big] e^{-\nu t}dt = 0. \tag{28}$$

Розглянемо тепер

$$\chi_k = \int_0^T \Big[\langle A(t, u_t^{\alpha_k}) - A(t,w), u_t^{\alpha_k} - w\rangle + \langle B(t)(u_t^{\alpha_k} - w_0), u_t^{\alpha_k} - w\rangle \Big] e^{-\nu t} dt.$$

Нехай $w = (1-\theta)u_t + \theta v$, де $w_0(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau + u_0$, $v \in L^p((0,T);V_p)$, $v(t) \in K$ для майже всіх $t \in [0,T]$. Тоді, враховуючи (28), матимемо

$$0 \le \lim\inf_{\alpha_k \to 0} \chi_k = \theta \lim\inf_{\alpha_k\to 0} \Bigg[\int_0^T \Big(\langle A(t, u_t^{\alpha_k}), u_t - v\rangle + \langle B(t)u^{\alpha_k}, u_t - v\rangle \Big) e^{-\nu t} dt -$$

$$- \int_0^T \Big(\langle A(t,w), u_t - v\rangle + \langle B(t)w_0, u_t - v\rangle \Big) e^{-\nu t} dt \Bigg].$$

Якщо поділити на θ і спрямувати $\theta \to +0$, то одержимо

$$\int_0^T \Big[\langle A(t,u_t), u_t - v\rangle + \langle B(t)u, u_t - v\rangle \Big] e^{-\nu t} dt \le$$

$$\le \lim\inf_{\alpha_k \to 0} \int_0^T \Big[\langle A(t, u_t^{\alpha_k}), u_t - v\rangle + \langle B(t)u^{\alpha_k}, u_t - v\rangle \Big] e^{-\nu t} dt. \qquad (29)$$

Оскільки для довільної $v \in L^p((0,T);V_p)$, $v(t) \in K$ для майже всіх $t \in (0,T)$

$$\int_0^T \Big[\langle A(t, u_t^{\alpha_k}), u_t^{\alpha_k} - v\rangle + \langle B(t)u^{\alpha_k}, u_t^{\alpha_k} - v\rangle \Big] e^{-\nu t} dt - \int_0^T \langle F(t), u_t^{\alpha_k} - v\rangle e^{-\nu t} dt =$$

$$- \frac{1}{\alpha_k} \int_0^T \langle \mathcal{B}(u_t^{\alpha_k}) - \mathcal{B}(v), u_t^{\alpha_k} - v\rangle e^{-\nu t} dt \le 0,$$

то на підставі (29) одержуємо нерівність (21) і теорему доведено.

Список літератури

1. Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н., *Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах*, Прик. матем. и мех. **24** (1960), no. 3, 852-864.
2. G.I. Barenblatt, V.M. Entov, V.M. Ryzhik, *Theory of fluid flow through natural rocks*, Kluwer. Dordrecht Boston-London, 1990.
3. Рубинштейн Л.И., *К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. **12** (1948), no. 1, 27-45.
4. C. Cuesta, C.J. van Duijn, J. Hulshof. Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: travelling waves, *Preprint of CWI.*.

5. E. Di Benedetto, R.E. Showalter, *A pseudo-parabolic variational inequality and Stefan problem*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Applications **6** (1982), no. 3, 279-291.
6. P.J. Chen, M.E. Gurtin, *On a theory of heat conduction involving two temperatures*, Z. Angew. Math. Phys. **19** (1968), 614-627.
7. F. Scarpini, *Generate and pseudoparabolic variational inequalities: Approximate solutions*, Numer. Funct. Anal. and Optiiz. **9** (1987), 859-879.
8. Ting T.W., *Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations*, J. Math. Soc. Japan. **21** (1969.), no. 3, 440 - 453.
9. Gopala Rao V.R., Ting T.W., *Initial-boundary value problems for pseudoparabolic partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. **23** (1973), no. 2, 131 - 153.
10. Showalter R.E., *Partial differential equations of Sobolev-Galpern type*, Pacif. J. Math. **31** (1969), no. 3, 787 - 793.
11. Rundel W. The solution of initial-boundary value problem for pseudoparabolic partial differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A 74** (1976), 311 - 326.
12. Colton D., *Pseudoparabolic equations in one space variable*, J. Different. Equat. **12** (1972), no. 3, 559 - 565.
13. E. Di Benedetto, M. Pierre, *On the maximum principle for pseudoparabolic equations*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 821 - 854.
14. Бас М.О., Лавренюк С.П., *Про ¿единість розв'язку задачі Фур'едля однієї системи типу Соболева-Гальперна*, Український матем. ж. **48** (1996), no. 1, 124-128.
15. Колінько М.О., Лавренюк С.П., *Єдиність розв'язку задачі Фур'е для однієї нелінійної псевдопараболічної системи*, Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-мат. **45** (1996), - 70-77.
16. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, М.: Мир, 1978, pp. 336.
17. Лионс Ж.-Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, М.: Мир, 1972, pp. 608.
18. Бокало Н.М., *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений*, Труды семинара им. И.Г.Петровского **14** (1989), 3-44.

вул.Венеціанова 15, кв.17,
79001, м.Львів, Україна
E-mail address: diffeq@mf.franko.lviv.ua